8. Das Kreuzprodukt

Bisher kennen wir die Skalarmultiplikation, das Skalarprodukt.

Zur Erinnerung: Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 beträgt.

Nun lernen wir das Kreuzprodukt kennen.

<table>
<tr>
<td>
Vorübung: Finde einen Vektor, der zu jeweils zu den Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix}$ orthogonal ist.

Ansatz: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} = 0$
Mit dem Skalarprodukt ergeben sich zwei Gleichungen:

I $1n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0$ => $n_1 = -2n_2 - 3n_3$
II $7n_1 + 1n_2 + 4n_3 = 0$

I in II: $7(-2n_2 - 3n_3) + n_2 + 4n_3 = 0$
$-14n_2 - 21n_3 + n_2 + 4n_3 = 0$
$-13n_2 - 17n_3 = 0$
$-13n_2 = 17n_3$
$n_3 = -\frac{13n_2}{17}$
Setze $n_2 = 17$ => $n_3 = -13$. Eingesetzt in I
$n_1 = -2n_2 - 3n_3$ ergibt sich:
$n_1 = -2\cdot 17 - 3\cdot(-13) = -34 + 39 = 5$
Der Vektor, der zu beiden orthogonal ist, lautet: $\bar{n} = \begin{pmatrix}5\\17\\-13\end{pmatrix}$.
Anmerkung: Wir haben $n_2 = 17$ gewählt, damit sich das mit dem Nenner kürzt und wir für n_3 keinen Bruch erhalten.
</td>
<td>
Aufgabe: Finde auf die gleiche Weise ein Vektor, der zu jeweils zu den Vektoren $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ orthogonal ist.
$\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} = 0$
I $3n_1 + 4n_2 + n_3 = 0$ => $n_3 = -3n_1 - 4n_2$
II $2n_1 - 1n_2 + 2n_3 = 0$

I in II $2n_1 - 1n_2 + 2(-3n_1 - 4n_2) = 0$
$2n_1 - 1n_2 - 6n_1 - 8n_2 = 0$
$-4n_1 - 9n_2 = 0$

$n_1 = -\frac{9}{4}n_2$

Sei $n_2 = -4$ => $n_1 = -\frac{9}{4}(-4) = 9$
</td>
</tr>
</table>

Würde man diese Rechnung nicht mit konkreten Zahlen, sondern allgemein durchführen, dann würden wir das Kreuzprodukt bzw. das Vektorprodukt herleiten:

Definition:

Definition: Für Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ heißt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

(lies: „ $\vec{a}$ kreuz $\vec{b}$“) das Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Satz: Es gilt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist sowohl orthogonal zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$

Beispiel: Berechne das Kreuzprodukt der beiden Vektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \\ -(1 \cdot 4 - 3 \cdot 7) \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ -13 \end{pmatrix}$.

Möchte man also eine Zeile des Kreuzprodukts berechnen, so multipliziert man die anderen beiden Einträge und subtrahiert sie. Beim mittleren Eintrag setzt man ein Minus davor.

Aufgabe: Bestimme mithilfe des Kreuz- bzw. Vektorproduktes einen orthogonalen Vektor zu den Vektoren:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} und \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es gibt auch andere Methoden, das Kreuzprodukt zu berechnen, wie man bei Youtube leicht finden kann.

Link: Kreuzprodukt - Vektorgeometrie REMAKE - YouTube

Schaut euch das Video bis 3:23 min an, rechnet dann das zweite Kreuzprodukt nach der zweiten Methode.

Schaut euch das Video zu Ende an:

Notiert euch Definitionen zu folgenden Begriffen:

Nullvektor:

Ortsvektor:

Einheitsvektor:

Kollinear:

Bestimme mithilfe des Vektorproduktes einen orthogonalen Vektor zu den Vektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} und \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Verwende dabei die Methode aus dem Video.

Anmerkung:

Der orthogonale Vektor ist eindeutig, d.h. es gibt nur einen Vektor, der zu beiden Vektoren orthogonal ist. Allerdings kann der Vektor unterschiedlich lang sein. Daher sind auch alle Vielfache eines Vektors orthogonal, wie z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Aber auch der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dieser Vektor „geht“ nur in die andere Richtung.

Im GTR berechnet man das Kreuzprodukt folgendermaßen: